corregido

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires
Examen Final de Probabilidad y Estadística - 3 de octubre de 2018

Apellido y Nombre ....
Legajo: ....

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Teórico 1	Teórico 2	Nota

La condición mínima de aprobación es dos prácticos y un teórico correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1 En tres grandes poblaciones A, B y C la proporción de individuos infectados por un determinado virus es del 30 %, 60 % y 10 % respectivamente. Se toma al azar una de las 3 poblaciones (las tres son igual de probables), y de ella se seleccionan 10 individuos al azar, resultando que 2 de ellos están infectados. ¿A qué población es más probable que pertenezcan estoss 10 individuos?

Ejercicio 2 Un instituto de formación técnica en automotores sostiene que las remuneraciones de sus egresados son superiores a las de los mecánicos que trabajan en los talleres de la Ciudad de Buenos Aires. Los salarios pagados el año pasado, en su primer trabajo, a los mecánicos de los talleres de la ciudad arrojaron una media de \$117,80 por hora. Una muestra aleatoria de 10 graduados del último año de este instituto registran los siguientes salarios por hora de trabajo:

116,20 118,90 121,60 120,40 119,20 117,10 117,40 119,80 120,10 120,70

Suponga que estos salarios constituyen una muestra de una población de salarios con distribución normal

a) ¿Permite la información muestral sostener la afirmación del Instituto? Responda asumiendo un riesgo del 2 % de dar una respuesta positiva cuando la afirmación no es cierta.

b) ¿Qué tipo de error puede estar cometiendo en esta decisión?

Ejercicio 3 La duración en horas de cierto componente eléctrico es una variable aleatoria cuya distribución es exponencial. Se sabe que la probabilidad de que dicho componente dure más de 24 horas es 0.6

a) Halle la probabilidad de que un componente eléctrico dure más de 48 horas.

b) Si un equipo tiene tres de estos componentes en paralelo, cuál es la probabilidad de que funcione más de 24 hs?

c) Idem, b) pero en serie.

Ejercicio 4 En una oficina trabajan 17 empleados de los cuales 9 son mujeres y 3 de ellas usan gafas. Además, la mitad de los hombres también usa gafas. Se debe formar una comisión con 4 empleados de esta oficina y se decide seleccionarlos al azar, hallar la probabilidad de que:

a) la mitad de los seleccionados usen gafas.

b) *una mujer sin gafas y un hombre con gafas* sean seleccionados sabiendo que la comisión es mixta.

Teórico 1 a) ¿Cómo se vincula el coeficiente de correlación lineal de una muestra de dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas con el coeficiente de determinación?

b) ¿Cuáles son las cotas de esos coeficientes? Explique.

Teórico 2 Dos poblaciones normales son estudiadas a través de dos muestras aleatorias independientes. La muestra de la primera población tiene tamaño n_1 y la de la segunda tiene tamaño $n_2 = 3.n_1$, el desvío Standard de la primera población es σ_1 y el de la segunda es $\sigma_2 = 3.\sigma_1$. En cuál de las dos poblaciones espera que pueda estimarse la media poblacional con mayor precisión? (Utilice la longitud del intervalo de confianza para responder).

PyE UTN

Final

3-10-18

① En tres grandes poblaciones A, B y C la proporción de individuos infectados por un determinado virus es del 30%, 60% y 10% respectivamente. Se toma al azar una de las tres poblaciones (las tres son igual de probables) y de ella se seleccionan 10 individuos al azar, resultando que dos de ellos están infectados ¿A qué población es más probable que pertenezcan estos 10 individuos?

I : "cantidad de individuos infectados en un grupo de 10"

$I \sim Bi(10, p)$, p varía según la población de la que proviene

A : "la población elegida es la A"
B : " " " " " " B"
C : " " " " " " C"

$\boxed{P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3} = 0{,}333}$

I_i : "cant. de individuos infectados en un grupo de 10 proveniente de la población i" $i \in \{A, B, C\}$

$I_A \sim Bi(10, 0.3)$, $I_B \sim Bi(10, 0.6)$ $I_C \sim Bi(10, 0.10)$

→ tengo que hallar el mayor valor entre 3 prob.:

i) $P(A | I = 2)$; ii) $P(B | I = 2)$; iii) $P(C | I = 2)$

si $i \in \{A, B, C\} \rightarrow P(i | I = 2) \underset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(I=2 | i)\, P(i)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{3} P(I=2|i) P_i}}$

Como $P(i)$ son iguales para $i = A, B, C$ y esto también, entonces solo hallo cuál es el i para el que $P(I=2|i)$ es mayor.

• $P(I=2|A) = P(I_A = 2) = \binom{10}{2} 0{,}3^2\ 0{,}7^8 = \boxed{0{,}2335 = P(I=2|A)}$

• $P(I=2|B) = P(I_B = 2) = \binom{10}{2} 0.6^2\ 0{,}4^8 = 0{,}0106 = P(I=2|B)$

• $P(I=2|C) = P(I_C = 2) = \binom{10}{2} 0{,}1^2\ 0.9^8 = 0{,}1937 = P(I=2|$

Es más probable que pertenezcan a la población A

Sel vima

② Un instituto de formación técnica en automotores sostiene que las remuneraciones de sus egresados son superiores a las de los mecánicos que trabajan en los talleres de la ciudad de Bs. As. Los salarios pagados el año pasado, en su primer trabajo, a los mecánicos de los talleres de la ciudad arrojaron una media de $117,80 por hora.
Una muestra aleatoria de 10 graduados del último año de este instituto registran los sig. salarios por hora de trabajo:

116,20   118,90   121,60   120,40   119,20   117,10   119,80   120,10   120,70   117,40

Suponga que estos salarios constituyen una muestra de una población de salarios con distribución normal.

a) ¿Permite la información muestral sostener la afirmación del Instituto? Responda asumiendo un riesgo del 2%.

$n = 10$
$\alpha = 0.02$
$\bar{X} = 119,14$
$s = 1,7424$
Pobl. normal, varianza desconocida

$$H_0: \mu > 117,80 \quad vs \quad H_1: \mu < 117,80$$

$$T_{em} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 117,80}{\frac{1,7424}{\sqrt{10}}} \sim t_9 \text{ bajo } H_0$$

Rechazo si: $t_{obs} < t_{9,\,0.02}$

$t_{9,0.02} = 2,398$

$$T_{obs} = \frac{(119,14 - 117,80)\sqrt{10}}{1,7424} = 2,43196$$

$T_{obs} > t_{9,\,0.02}$ ∴ NO Rechazo H_0

$\boxed{\text{Hay evidencia de que el salario del graduado es mayor que el de los mecánicos}}$

b) ¿Qué tipo de error puede estar cometiendo en esta decisión?

El error sería NO Rechazar H_0 cuando H_0 es Falsa → Error tipo II

PyE

Final
3-10-18

(3) La duración de cierto componente eléctrico es una v.a. cuya distribución es exponencial. Se sabe que la probabilidad de que dicho componente dure más de 24 horas es 0,6.

a) Halle la probabilidad de que un componente eléctrico dure más de 48 horas.

X: "duración, en horas, de un componente eléctrico" $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$P(X>24) = 0,6 = 1-P(X\leq 24) = 1-(1-e^{-\lambda \cdot 24}) = e^{-24\lambda} \rightarrow$

$\rightarrow \ln(0,6) = \ln(e^{-24\lambda}) \longrightarrow \ln(0,6) = -24\lambda \rightarrow \boxed{\lambda = 0.021} \rightarrow X \sim \mathcal{E}(0,021)$

$P(X>48) = 1-P(X\leq 48) = 1-(1-e^{-48\times 0,021}) = e^{-48\times 0.021} = \boxed{0,36 = P(X>48)}$

b) Si un equipo tiene tres de estos componentes en paralelo ¿cuál es la probabilidad de que funcione más de 24 horas?

Y: "cantidad de componentes eléctricos que funcionan más de 24 hs, en un conjunto de 3" $Y \sim Bi(3, 0.6)$

$P(Y\geq 1) = 1-P(Y<1) \overset{\text{discreta}}{=} 1-P(Y=0) = 1-\binom{3}{0} 0.6^0 \; 0,4^3 = 0,936$

$$\boxed{P(Y\geq 1) = 0,936}$$

(cuando es en paralelo, funciona cuando al menos 1 sigue funcionando)

c) Idem b) pero en serie.

Cuando es en serie, cuando uno deja de funcionar, el equipo deja de funcionar → tienen que funcionar todos

$P(Y=3) = \binom{3}{3} 0.6^3 \; 0,4^0 = \boxed{0,216 = P(Y=3)}$

Sofluma

④ En una oficina trabajan 17 empleados de los cuales 9 son mujeres y 3 de ellas usan gafas. Además, la mitad de los hombres también usan gafas. Se debe formar una comisión con 4 empleados de esta oficina y se decide seleccionarlos al azar. Hallar la probabilidad de que:

a) la mitad de los seleccionados usen gafas.

9 mujeres	3 mujeres con gafas	6 mujeres sin gafas
8 hombres	4 hombres con gafas	4 hombres sin gafas

M: "la persona seleccionada es Mujer" $P(M) = 9/17 = 0.53$

H: " " " es Hombre" $P(H) = P(\bar{M}) = 8/17 = 0{,}47$

G: " " " " usa Gafas" $P(G|M) = 3/9 = 0{,}333$

$P(G|H) = 4/8 = 0{,}5$

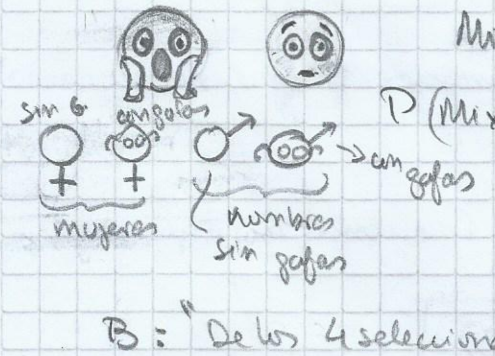
Prob. total

$$\boxed{P(G) \overset{\downarrow}{=} P(G|M)\,P(M) + P(G|H)\,P(H) = 0{,}333 \times 0{,}53 + 0{,}5 \times 0{,}47 = 0{,}4115}$$

X: "cantidad de personas seleccionadas que usan gafas, de un grupo de 4 personas" $X \sim Bi(4,\ 0.4115)$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} 0{,}4115^2\ 0{,}5885^2 = \boxed{0.3519 = P(X=2)}$$

b) una mujer sin gafas y un hombre con gafas sean seleccionados sabiendo que la comisión es mixta.



Mixta: "la comisión seleccionada es mixta"

$$P(\text{Mixta}) = 1 - P(\text{No mixta}) = 1 - [P(4H) + P(4M)] =$$

$$= 1 - \left[\frac{\binom{8}{4} + \binom{9}{4}}{\binom{17}{4}}\right] = \boxed{0.9176 = P(\text{mixta})}$$

B: "De los 4 seleccionados: 1 es mujer sin gafas y 1 es hombre con gafas"

Los otros dos pueden ser: 2 mujeres con gafas o 2 hombres sin gafas o (1 mujer con gafas y 1 hombre sin gafas)

$$P(B\,|\,\text{Mixta}) = \frac{P(B \cap \text{Mixta})}{P(\text{Mixta})}$$

de permutaciones

$$\bullet\ P(B \cap \text{Mixta}) = 4!\left[\frac{6}{17}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14} + \frac{6}{17}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14} + 2\cdot\frac{6}{17}\,\frac{4}{16}\,\frac{3}{15}\,\frac{4}{14}\right]$$

$$= 24\left(\frac{3}{1190} + \frac{3}{595} + 2\times\frac{3}{595}\right) = \frac{36}{85} = \boxed{0{,}4235 = P(B \cap \text{Mixta})}$$

$$P(B\,|\,\text{Mixta}) = \frac{0{,}4235}{0{,}9176} = \boxed{0{,}4615 = P(B\,|\,\text{Mixta})}$$

¡No sé si está bien. Tardé una hora en hacerlo!

PyE

Final

3-10-18

Teórico 1

a) ¿Cómo se vincula el coef. de correlación lineal de una muestra de dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas con el coeficiente de determinación?

coef. de correlación lineal $= r$
coef. de determinación $= r^2$

coef. correl. lineal es el cuadrado del coef. de determinación

b) ¿Cuáles son las cotas de esos coeficientes? Explique

$0 \leq$ coeficiente de determinación ≤ 1

$-1 \leq \underbrace{\text{coef. de correlación lineal}}_{r} \leq 1$

r con valores cercanos a 1 o -1 → buena pendiente

r con valores cercanos a 0 → no hay correlación, o tiende a no haber

Teórico 2

Dos poblaciones normales son estudiadas a través de dos muestras aleatorias independientes. La muestra de la primera población tiene tamaño n_1 y la de la segunda tiene tamaño $n_2 = 3n_1$, el desvío estándar de la primera población es σ_1 y el de la segunda es $\sigma_2 = 3\sigma_1$. ¿En cuál de las dos poblaciones espera que pueda estimarse la media poblacional con mayor precisión? (utilice la longitud del intervalo de confianza para responder)

$$IC_{1-\alpha}(\mu_1) = \left[\bar{X}_1 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} ; \bar{X}_1 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right] \rightarrow \boxed{\text{long}_1 = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}}$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu_2) = \left[\bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} ; \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}}\right] =$$

$$= \left[\bar{X}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3\sigma_1}{\sqrt{3}\sqrt{n_1}} ; \bar{X}_2 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right] \rightarrow \boxed{\text{long}_2 = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3} \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}}$$

$\text{long}_1 < \text{long}_2$ ∴ otorga mayor precisión la muestra de la población 1 pues, si bien el número de la muestra (n_1) es menor, lo que afecta más es la varianza de la muestra 2 que es mucho más grande que la 1

Sylvina